Das Skript der nützlichen Herleitungen

Ein Kompendium für Studenten der Ingenieurwissenschaften.

***Zusammenfassung*—Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.**

***Index Terms*—Mathematik, Maschinenbau, Elektrotechnik, Regelungstechnik, Modellbildung, Simulation**

MATHEMATIK

A. *Integrale verstehen und lösen*

*1) **Einführung**:* In diesem Abschnitt behandeln wir den Umgang mit Integralen.

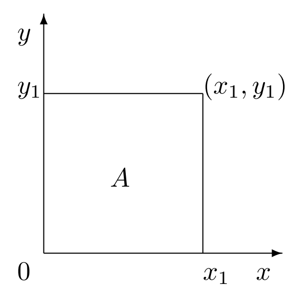

Abb. 1: Fläche A

In (Abb.1) wird in einem kartesischen Koordinatensystem eine Fläche vom Koordinatenursprung $(0, 0)$ zum Punkt (x_1, y_1) aufgespannt. Die Multiplikation der Seitenlängen führt zum Flächeninhalt

$$A = x_1 \cdot x_2.$$

Wie würde man nun vorgehen, wenn man den Flächeninhalt mittels Integralrechnung bestimmen wollte? Dazu müsste man im ersten Schritt ein infinitisimales Flächenelement definieren und dieses anschließend über den die Grenzen der Fläche integrieren. Die gesamte Fläche besteht also aus ganz vielen kleinen Einzelflächen. Das schreibt man so

$$A = \int \mathrm{d}A. \tag{1}$$

Gleichung (1) besagt, dass die Gesamtfläche A dem Integral des Flächenelementes über die Grenzen der Fläche entspricht. Um diese Gleichung lösen zu können muss das Flächenelement definiert werden. Da es sich um eine rechteckige Fläche handelt ist das ziemlich einfach. Für das Flächenelement gilt

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y. \tag{2}$$

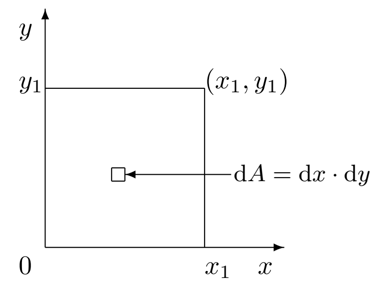

Abb. 2: Flächenelement $\mathrm{d}A$

Setzt man nun (2) in (1) ein, so erhält man

$$A = \int dx \cdot dy. \tag{3}$$

Aus (3) wird direkt ersichtlich, dass über zwei Grenzen integriert werden muss, nämlich über die Grenzen von $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$. Wir erweitern (3) zu

$$A = \iint \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y, \tag{4}$$

tragen anschließend die Grenzen auf und erhalten

$$A = \int_0^{x_1} \mathrm{d}x \cdot \int_0^{y_1} \mathrm{d}y. \tag{5}$$

Da $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ unabhängig voneinander sind, spielt die Integrationsreihenfolge in (5) keine Rolle. Man erhält die zu erwartende Lösung

$$A = [x]_0^{x_1} \cdot [y]_0^{y_1} = x_1 \cdot y_1.$$

In obigem Beispiel haben wir Mithilfe der Integralrechnung einen Flächeninhalt bestimmt. Es lassen sich aber noch viele andere Dinge damit berechnen wie wir in den folgenden Aufgaben sehen werden.

*2) **Wegintegral**:* Bestimmung einer Länge

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}l \tag{6}$$

$$[\Delta l]^2 = [f(x_2) - f(x_1)]^2 + [x_2 - x_1]^2$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$[\Delta l]^2 = [f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)]^2 + [\Delta x]^2$$

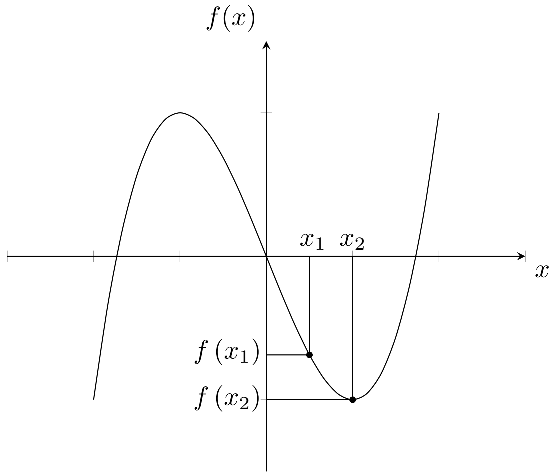

Abb. 3: Beliebige glatte Funktion $f(x)$

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{\left[\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\right]^2+1} \tag{7}$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \tag{8}$$

Der Ausdruck in (8) entspricht grade der Steigung einer Geraden, sog. Sekante durch die Punkte $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Wählt man nun $\Delta x \to 0$, so erhält man die Ableitung der Funktion $f(x)$, welche der Tangete im Punkt x_1 entspricht. Aus (8) folgt bei Betrachtung an einer beliebigen Stelle x

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{9}$$

Setzt man (9) in (7) ein, folgt unter Berücksichtigung von

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x} \to \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}$$

die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2+1} \tag{10}$$

Stellt man (10) nach $\mathrm{d}l$ um, erhält man für das Linienelement schließlich

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2+1}\ \mathrm{d}x. \tag{11}$$

I. Technische Mechanik

A. *Die Zentrifugalkraft*

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\|\vec{R}\| = R = \sqrt{x^2+y^2} \tag{13}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} R \tag{14}$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} \tag{15}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{dt}} \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{dt}} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}R + \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} = 0,\ \text{für}\ R = \text{const.} \tag{18}$$

$$\omega := \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \tag{19}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}\omega R \tag{20}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \omega R \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}\omega^2 R \tag{22}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\right\| = \omega^2 R \tag{23}$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = m\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\right\| = m\omega^2 R \tag{24}$$

II. Modellbildung und Simulation

A. *Elektrisches Netzwerk*

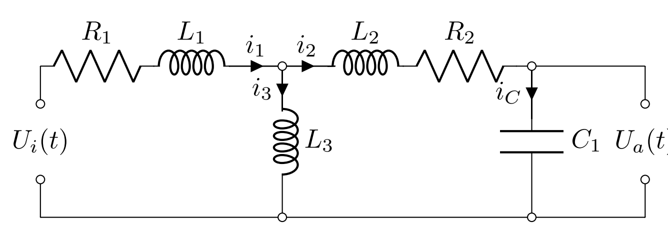

Abb. 4: Elektrisches Netzwerk

Der Maschensatz liefert die nachfolgenden Gleichungen:

$$U_e = U_{R_1} + U_{L_1} + U_{L_3} \tag{25}$$

$$U_{L_3} = U_{L_2} + U_{R_2} + U_{C_1} \tag{26}$$

$$U_{C_1} = U_a \tag{27}$$

Aus dem Knotensatz ergibt sich

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

und

$$i_2 - i_{C_1} = 0.$$

Die Beschreibung der passiven Elemente R_i, L_i und C_i erfolgt durch die nachfolgenden Gleichungen:

$$U_{R_1} = R_1 \cdot i_1,\ U_{R_2} = R_2 \cdot i_2$$

$$U_{L_1} = L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{dt}},\ U_{L_3} = L_3 \cdot \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{dt}}$$

$$U_{L_2} = L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{dt}} = L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_{C_1}}{\mathrm{dt}}$$

$$i_{C_1} = C_1 \cdot \frac{\mathrm{d}U_{C_1}}{\mathrm{dt}}.$$

Setzt man nun (26) in (25) erhält man

$$U_e = U_{R_1} + U_{L_1} + U_{L_2} + U_{R_2} + U_{C_1}. \tag{28}$$

Unter Berücksichtigung von (27) und der obigen Zusammenhänge für R_i, L_i und C_i folgt aus (28) zunächst

$$U_e = R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{dt}} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{dt}} + R_2 i_2 + U_a$$

und anschließend

$$U_e = i_2(R_1 + R_2) + (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{dt}} + U_a + L_1 \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{dt}} + R_1 i_3.$$

Ersetzt man nun den Strom i_2 durch die Ausgangsspannung U_a, gelangt man zu

$$U_e = C_1 R_{12} \dot{U}_a + C_1 L_{12} \ddot{U}_a + U_a + L_1 \dot{i}_3 + R_1 i_3 \tag{29}$$

mit den Beziehungen

$$\dot{U}_a := \frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{dt}},\ \ddot{U}_a := \frac{\mathrm{d}^2 U_a}{\mathrm{dt}^2}$$

$$\dot{i}_2 := \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{dt}},\ \dot{i}_3 := \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{dt}}$$

$$R_{12} := (R_1 + R_2),\ L_{12} := (L_1 + L_2).$$

Der Zusammenhang

$$U_{L_3} = R_2 C_1 \dot{U}_a + L_2 C_1 \ddot{U}_a + U_a = L_3 \dot{i}_3$$

führt zu den Ausdrücken

$$\dot{i}_3 = \frac{1}{L_3}\left(R_2 C_1 \dot{U} a + L_2 C_1 \ddot{U} a + U_a\right) \tag{30}$$

und

$$\ddot{i}_3 = \frac{1}{L_3}\left(R_2 C_1 \ddot{U}_a + L_2 C_1 \dddot{U} a + \dot{U}_a\right). \tag{31}$$

Im nächsten Schritt wird (29) nach der Zeit abgeleitet.

$$\dot{U}_e = C_1 R_{12} \ddot{U}_a + C_1 L_{12} \dddot{U}_a + \dot{U}_a + L_1 \ddot{i}_3 + R_1 \dot{i}_3 \tag{32}$$

Setzt man nun (30) und (31) in (32) ein erhält man

$$\begin{aligned} \dot{U}_e &= C_1 R_{12} \ddot{U}_a + C_1 L_{12} \dddot{U}_a + \dot{U}_a \\ &\quad + \frac{R_1}{L_3}\left(R_2 C_1 \dot{U} a + L_2 C_1 \ddot{U}_a + U_a\right) \\ &\quad + \frac{L_1}{L_3}\left(R_2 C_1 \ddot{U} a + L_2 C_1 \dddot{U} a + \dot{U}_a\right) \end{aligned} \tag{33}$$

die Beziehung zwischen dem Eingangssignal U_e und U_a in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Gleichung (33) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \dot{U}_e &= U_a \frac{R_1}{L_3} \\ &\quad + \dot{U}_a \left[1 + \frac{1}{L_3}(R_1 R_2 C_1 + L_1)\right] \\ &\quad + \ddot{U}_a \left[C_1 R_{12} + \frac{C_1}{L_3}(R_1 L_2 + R_2 L_1)\right] \\ &\quad + \dddot{U}_a \left[C_1 \left(L_{12} + \frac{L_1 L_2}{L_3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Führt man nun die Abkürzungen

$$a_0 := \frac{R_1}{L_3},\ a_1 := 1 + \frac{1}{L_3}(R_1 R_2 C_1 + L_1)$$

$$a_2 := C_1 R_{12} + \frac{C_1}{L_3}(R_1 L_2 + R_2 L_1)$$

$$a_3 := C_1 \left(L_{12} + \frac{L_1 L_2}{L_3}\right)$$

ein, folgt aus (34)

$$\dot{U}_e = a_0 U_a + a_1 \dot{U}_a + a_2 \ddot{U}_a + a_3 \dddot{U}_a. \tag{35}$$

Abbildungsverzeichnis