

## Beispiel zur Givens-Rotation:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -7 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{13}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow m = 3, n = 2$$

### 1.Rotation (i=1)

$$a_{ik} = 1 \quad a_{jk} = -2 \quad \Rightarrow |a_{ik}| < |a_{jk}|$$

$$t_1 = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{2}\right|^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447$$

$$s_1 = \frac{\frac{-2}{|-2|}}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{2}\right|^2}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx -0,894$$

$$\Rightarrow G(1,2, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = G_1$$

$$A_2 = G_1 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -7 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,236 & 6,708 \\ 0 & -2,236 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = G_1 \cdot b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{13}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} \\ -9 \\ \frac{2\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6,261 \\ -2,012 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

### 2.Rotation (i=2)

$$a_{ik} = -\sqrt{5} \quad a_{jk} = -5 \quad \Rightarrow |a_{ik}| < |a_{jk}|$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{5}}{|-5|} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \approx -0,447$$

$$c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{-1}{\sqrt{5}}\right|^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{65}} = \frac{-1}{\sqrt{65}} \approx -0,408$$

$$s_2 = \frac{\frac{-5}{\sqrt{-5}}}{\sqrt{1 + \left|\frac{-1}{\sqrt{5}}\right|^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \approx -0,913$$

$$\Rightarrow G(2,3, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = G_2$$

$$A_3 = G_2 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{30} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,236 & 6,708 \\ 0 & 5,477 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = G_2 \cdot b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} \\ -9 \\ \frac{2\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} \\ \frac{17}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6,261 \\ 3,104 \\ -0,816 \end{bmatrix}$$

### Lösen des Gleichungssystems:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} \\ \frac{17}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

$$R_1 x = c_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} \\ \frac{17}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{17}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{17}{30}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left( \frac{14}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{17}{30} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{11}{10}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{17}{30} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,567 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{11}{10} + \frac{17}{30}x$$



## Givens\_Rotation.m

```

function x=Givens_Rotation(H, b)

function x=LoesungAusgleichsprob(H, b)
[m, n]=size(H);
[lb, bb]=size(b);
T=tril(H, -2);
%Abmessungen prüfen
if(m<n)
    error('Länge von H muss größer als die Breite sein, ansonsten ist
das Problem unterbestimmt')
elseif(m~=lb)
    error('Länge von H und b müssen übereinstimmen')
elseif(bb>1)
    error('Diese Version ist nicht vektorisiert. Nur eine Spalte in b
erlaubt')
elseif(norm(T)~=0)
    error('H hat nicht obere Hessenberg-Form')
end
%H in Dreiecksgestalt umformen,
%Givens-Rotationen auf b anwenden
for i=1:n
    [c, s]=berechne_cs(H, i, i+1, i);
    H=GivensRot(H, i, i+1, c, s, i);
    b=GivensRot(b, i, i+1, c, s, 1);
end
R=H;
c=b;
%rückwärtseinsetzen
x=rueckwsubst(R(1:n, 1:n), c(1:n, 1));
end

function y=signum(x)
if(x==0)
    y=1;
else
    y=x/abs(x);
end
end

function [c, s]=berechne_cs(A, i, j, k)
aik=A(i, k);
ajk=A(j, k);
if(abs(aik)>=abs(ajk))
    t=ajk/abs(aik);
    n=sqrt(1+abs(t)^2);
    c=signum(aik)/n;
    s=t/n;
else
    t=aik/abs(ajk);
    n=sqrt(1+abs(t)^2);
    c=t/n;
    s=signum(ajk)/n;
end
end

function GA=GivensRot(A, i, j, c, s, startSpalte)
GA=A;
GA(i, startSpalte:end)=c'*A(i, startSpalte:end)+s'*A(j, startSpalte:end);
GA(j, startSpalte:end)=c'*A(j, startSpalte:end)-s'*A(i, startSpalte:end);
end

function x=rueckwsubst(R, c)
n=size(R, 1);
x=zeros(n, 1);
for j=n:(-1):1
    x(j, 1)=(c(j, 1)-R(j, (j+1):n)*x((j+1):n, 1))/R(j, j);
end
end
    
```

Givens\_Rotation.m

```
x=LoesungAusgleichsprob(H, b);  
end
```