

Numerik II

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 8 (5P)

a) Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a, b]$, so gilt für die summierte Trapezregel $I_1^{s(N)}$:

$$|I(f) - I_1^{s(N)}(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|,$$

mit $h = (b-a)/N$.

b) Schätzen Sie ab, wie groß N in der summierten Trapezregel $I_1^{s(N)}$ sein muss, damit für die Approximation von

$$\int_0^1 x^4 dx$$

der Fehler sicher kleiner als 10^{-2} ist. Wie groß muss N tatsächlich sein?

Aufgabe 9 (5P)

Zeigen Sie: Ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, so ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ symmetrisch und positiv definit.

Aufgabe 10 (10P) Programmieraufgabe, Bearbeitung bis 23.05.

Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ haben Sie bereits auf dem letzten Übungszettel kennen gelernt. Für sie gilt folgende Rekursion:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \end{aligned}$$

sowie für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_0(x) &= 0, \\ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) &= -nP_n(x) + nP_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Ein Algorithmus um die Nullstellen $x_{k,n}$, $k = 1, \dots, n$ des Legendre-Polynoms $P_n(x)$ zu bestimmen, ist in Tabelle 1 angegeben. Diese Nullstellen dienen als Stützstellen der Gauß-Quadraturformel G_n . Die zugehörigen Gewichte lassen sich berechnen als

$$\sigma_{k,n} = \frac{2}{1-x_{k,n}^2} \left[\frac{d}{dx} (P_n(x)) \Big|_{x=x_{k,n}} \right]^{-2}.$$

Für $k = 1, \dots, n$
$r = -\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$
Falls $k > 1$
$r = (r + x_{k-1})/2$
Für $j = 1, \dots, \text{maxloop}$
$s = \sum_{i=1}^{k-1} (1/(r - x_i))$
$\delta = -P_n(r)/([P_n(r)]' - P_n(r)s)$
$r = r + \delta$
Falls $(\delta < \epsilon)$ Schleife beenden
$x_k = r$

Tabelle 1: Algorithmus zur Nullstellenberechnung.

- a) Beschreiben Sie die Funktionsweise des Algorithmus. Untersuchen Sie hierzu die Schleife ‘Für $j = 1, \dots, \text{maxloop}$ ‘ unter folgenden Gesichtspunkten:
- Welches Verfahren findet hier Anwendung?
 - Warum wird in jedem Durchlauf der Schleife ‘Für $k = 1, \dots, n$ ‘ eine neue Nullstelle gefunden?

Über die Initialisierung von r müssen Sie sich keine Gedanken machen.

- b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm name `_blatt04.m`, welches für gegebenes $n \geq 1$ die n Stützstellen und Gewichte der Gauß-Quadraturformel G_n berechnet und ausgibt. Programmieren Sie hierzu den gegebenen Algorithmus. Setzen Sie $\text{maxloop} = 10$ und $\epsilon = \text{eps}$ (Matlab-interne Fehlerschranke). Eine Schleife beenden Sie mit dem Befehl `break`.

Die Berechnung von $P_n(x)$ und $P'_n(x)$ sollte in einer Funktion $[P, dP] = \text{name_jacobi}(n, x)$ geschehen.

- c) Testen Sie Ihr Programm, indem Sie für $n = 1, 2, 3$ die Stützstellen und Gewichte von G_n berechnen.

Schicken Sie Ihre Matlab-Files bitte an den Numerik II-Verteiler `numerik2@mathematik.uni-kassel.de` und werfen Sie einen Ausdruck Ihrer Ergebnisse in den Abgabekasten Numerik II.

**Abgabe: Bis Mo, 16.05.2011, 11:15 in den Numerik II-Briefkasten
Rücksprache bis Mo, 30.05.2011**